

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ $\mathcal{Q}_{q,p}$ -ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Сергей Константинович Водопьянов¹

Данил Алексеевич Сбоев²

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия,

²Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

¹vodopis@math.nsc.ru. <https://orcid.org/0000-0003-1238-4956>

²d.sboev@g.nsu.ru. <https://orcid.org/0009-0008-4027-9161>

Аннотация

Работа посвящена исследованию задачи о граничном соответствии для $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов, определенных на метрическом пространстве с мерой со значениями в другом метрическом пространстве с мерой.

Ключевые слова и фразы

метрическое пространство с мерой, пространство Соболева, гомеоморфизм класса Решетняка, квазиконформный анализ, оператор композиции, емкость конденсатора, емкостная граница.

Источник финансирования

Работа С.К. Водопьянова подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006). Работа Д.А. Сбоева выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.)

Для цитирования

Водопьянов С. К., Сбоев Д. А. Граничное поведение $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов на метрических пространствах с мерой // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 11-45. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-11-45

Boundary Behavior of $\mathcal{Q}_{q,p}$ -homeomorphisms on metric measure spaces

Sergey K. Vodopyanov¹, Danil A. Sboev²,

¹Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

¹vodopis@math.nsc.ru. <https://orcid.org/0009-0008-4027-9161>

²d.sboev@g.nsu.ru

Abstract

We investigate a problem of boundary behavior of $\mathcal{Q}_{q,p}$ -homeomorphisms between domains in metric measure spaces.

Keywords

metric measure space, Sobolev space, homeomorphism of Reshetnyak class, quasiconformal analysis, composition operator, capacity of condenser, capacity boundary.

Funding

The work of S. K. Vodopyanov was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF-2022-0006). The work of D. A. Sboev was supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under agreement 075-15-2025-349 dated April 29, 2025 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation

Vodopyanov S. K., Sboev D. A., Boundary Behavior of $\mathcal{Q}_{q,p}$ -homeomorphisms on metric measure spaces // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 11-45. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-11-45

§ 1. Введение и постановка задачи

Теорема Каратеодори [1] утверждает, что конформное отображение областей на плоскости, ограниченных жордановыми кривыми, может быть гомеоморфно продолжено на границу. Исследуя случай нежордановых областей, К. Каратеодори заложил основы теории простых концов в $\mathbb{R}^2$, в рамках которой был открыт геометрический подход для описания поведения конформных отображений в граничных точках. Теория простых концов Каратеодори получила развитие в работах Г. Д. Суворова [2], Д. Б. А. Эпштейна [3], в которых были исследованы новые задачи граничного поведения отображений на плоскости $\mathbb{R}^2$. В. А. Зорич в работах [4, 5] рассматривает случай многомерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Подход в терминах простых концов оказался полезным, в частности, при исследовании задач Дирихле для эллиптических уравнений [6] и в теории динамических систем [7, 8]. В настоящее время теория простых концов хорошо развита в различных направлениях, более подробный обзор имеющихся результатов и литературы см. в [9, 10, 11, 12]. В отличие от плоскости, в многомерном случае существуют жорданова область и квазиконформное отображение, которое невозможно гомеоморфно продолжить на границу этой области [13]. Значит, исследование задачи о граничном соответствии в пространстве требует более тонкого анализа геометрических свойств областей. Геометрический подход к данному вопросу, основанный на понятии модуля семейства кривых, заключается в исследовании областей, обладающих специальными геометрическими характеристиками, например, свойствами границы быть квазиконформно плоской и квазиконформно достижимой [14, 15] или свойствами $P1$ и $P2$ из [12, 16]. Такой подход нашел применение в исследовании граничного соответствия так называемых Q -гомеоморфизмов, см. монографию [17] и работы [12, 18].

Еще одно направление в исследовании граничного поведения — попытка обобщить конструкцию простых концов Каратеодори на метрические пространства с мерой. Одно из таких обобщений было предпринято в работе [10]. Данные простые концы отличаются от простых концов Каратеодори и используют, скорее топологию областей, а не геометрию области и (или) отображений. К этому направлению относятся также работы [11], [19], [20] (см. также приведенную в них литературу), где устанавливаются результаты о граничном поведении различных классов отображений относительно простых концов.

В работах [21, 22, 23] был заложен функционально-геометрический подход, к исследованию граничного поведения квазиконформных отображе-

ний, в котором ключевую роль играет понятие емкости конденсатора: емкость конденсатора связывает евклидову геометрию области и геометрию функционального пространства L_n^1 на этой области.

В работе [24] данный подход успешно применялся в решении ряда задач о граничном соответствии при отображениях, отличных от квазиконформных. В статье [15] подход работ [21, 22, 23] к определению емкостной метрики был интерпретирован на языке модулей семейств кривых. Заметим, что между тремя основными подходами к граничному поведению отображений — с помощью простых концов, геометрическим описанием и функционально-геометрическим определением — есть определенная иерархия: каждый из них адекватно описывает граничное поведение определенных классов отображений.

В работе [25] исследуется задача о граничном соответствии для обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам в $\mathbb{R}^n$; основы теории $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов заложены в работах [26, 27, 28, 29]. Для этого исследованы пополнения областей по специальным емкостным метрикам в образе и прообразе, ассоциированным с геометрией подходящего класса Соболева L_p^1 . Элементы, присоединяемые к области при пополнении соответствующего метрического пространства, образуют несобственную границу, которую мы называем емкостной границей $H_{\rho,p}$. Изучение граничного поведения гомеоморфизма f обратного к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизму, состоит в том, чтобы

(a) продолжить f на емкостную границу $H_{\rho,p}$;

(b) установить связь между элементами емкостной границы с точками евклидовой границы области;

Основная цель настоящей работы — распространить ключевые понятия и результаты граничного поведения на $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмы между двумя областями в метрических пространствах. Основы теории $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов в метрических пространствах с мерой заложены в работах [30, 31].

Опишем структуру работы.

Разд. 2 содержит предварительные сведения о метрических пространствах с мерой, слабом неравенстве Пуанкаре и емкости конденсаторов в пространствах Соболева.

В разд. 3 устанавливаются основные свойства емкостной метрической функции: при определенных показателях емкостная метрическая функция — метрика; приведены свойства фундаментальных в емкостной метрике последовательностей; получено описание емкостных граничных элементов в областях со свойством продолжения, в областях с границей, состоящей из достижимых точек; приведены примеры метрических пространств с мерой, для которых выполняются результаты этого раздела.

В разд. 4 установлена теорема о продолжении гомеоморфизма, обратного к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизму, на емкостную границу $H_{\rho,p}$. В качестве след-

ствия получен аналог теоремы Кёбе для гомеоморфизмов, обратных к $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмам, в метрических пространствах с мерой.

§ 2. Предварительные сведения и обозначения

Символом C будем обозначать некоторую константу, которая может изменяться от строчки к строчке контролируемым образом.

2.1 Метрические пространства с мерой

Лекции [33] содержат введение в анализ на метрических пространствах.

В метрическом пространстве (X, d) символом $B(x, r)$ обозначаем открытый шар, т. е. $B(x, r) = \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$, и $\overline{B}(x, r)$ — замкнутый шар, т. е. $\overline{B}(x, r) = \{x' \in X \mid d(x, x') \leq r\}$. Отметим, что всегда имеет место включение $\text{cl } B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$, где $\text{cl } B(x, r)$ — замыкание шара $B(x, r)$. Если B — некоторый шар (открытый или замкнутый), то символом λB , где $\lambda > 0$, обозначаем шар того же типа, что и B , с центром x_0 и радиусом λr , где x_0 — центр шара B , r — радиус B .

Говорят, что X обладает *свойством Гейне — Бореля*, если любое ограниченное и замкнутое множество в X компактно.

Множество всех подмножеств X обозначается как $\mathcal{P}(X)$. Под словом мера имеется в виду внешняя мера, т. е. функция множеств $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, такая, что $\mu(\emptyset) = 0$ и μ счетно субаддитивна. Под измеримостью понимается измеримость по Каратеодори.

Мера μ в метрическом пространстве (X, d) называется *мерой Бореля*, если любое множество B из борелевской σ -алгебры $\mathcal{B}(X)$ — μ -измеримое множество. Мера μ на X называется *регулярной мерой Бореля*, если μ — мера Бореля и для любого множества $A \subset X$ существует множество $B \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $A \subset B$ и $\mu(B) = \mu(A)$. Мера μ называется нетривиальной, если $\mu(X) > 0$. Говорят, что мера μ локально конечна, если для любой точки $x \in X$ существует радиус $r > 0$ такой, что $\mu(B(x, r)) < \infty$.

В настоящей работе *метрическое пространство с мерой* — это тройка (X, d, μ) , где (X, d) — сепарабельное метрическое пространство и μ — нетривиальная и локально конечная регулярная мера Бореля на X . Из определения следует, что метрическое пространство с мерой σ -конечно.

Сформулируем свойство регулярных мер Бореля.

Лемма 2.1. Пусть μ — регулярная мера Бореля на метрическом пространстве (X, d) . Тогда для любого μ -измеримого множества $A \subset X$ имеет место равенство

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, C \subset X \text{ — замкнутое множество}\},$$

если $B \subset X$ — произвольное множество, то

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid B \subset O, O \subset X \text{ — открытое множество}\}.$$

Доказательство леммы 2.1 можно найти, например, в [34, 35].

Мера μ в метрическом пространстве с мерой *удовлетворяет условию удвоения*, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых $x \in X$ и $r > 0$ выполняется

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)).$$

Говорят, что пространство (X, d, μ) *Q-регулярно по Альфорсу*, если существует константа $C > 0$ такая, что для всех $x \in X$ и $0 < r < \text{diam } X$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{C}r^Q \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^Q.$$

Пространства $L^p(E, \mu)$, где $E \subset X$ — измеримое множество и $1 \leq p \leq \infty$, определяются обычным образом. Пространство $L^p_{\text{loc}}(E, \mu)$ состоит из таких функций f , что для любой точки $x \in E$ существует окрестность U , что $f \in L^p(E \cap U, \mu)$.

2.2 Модуль семейства кривых

Пусть $\mathfrak{M}(X)$ — семейство всех непостоянных спрямляемых кривых в X . Отметим, что в некоторых случаях множество $\mathfrak{M}(X)$ может быть пустым: например, если X — канторово множество $C(\lambda)$, $0 < \lambda < 1/2$, или любое вполне несвязное множество; кривая Коха $\mathcal{K}$ или любое пространство типа снежинки¹.

Для подсемейства $\Gamma \subset \mathfrak{M}(X)$ обозначим символом $F(\Gamma)$ все борелевские функции $\varrho: X \rightarrow [0, \infty]$ такие, что

$$\int_{\gamma} \varrho ds \geq 1 \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma.$$

Интеграл $\int_{\gamma} \varrho ds$ понимается в следующем смысле: пусть $\tilde{\gamma}$ — натуральная параметризация γ и $\ell(\gamma)$ — длина кривой, тогда полагаем

$$\int_{\gamma} \varrho ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \varrho(\tilde{\gamma}(t)) dt.$$

¹Метрическое пространство (X, d) называется *пространством типа снежинки* (snowflake space), если некоторая степень метрики $d^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, — снова метрика.

Для каждого $1 \leq p < \infty$ определим p -модуль семейства кривых Γ формулой

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in F(\Gamma)} \int_X \varrho^p d\mu.$$

Если множество функций $F(\Gamma)$ пусто, то полагаем $M_p(\Gamma) = +\infty$.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для M_p -п. в. кривых, если это свойство выполняется для всех кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X) \setminus \Gamma$, где $M_p(\Gamma) = 0$.

Доказательства основных свойств модуля семейства кривых можно найти, например, в [33, 35, 36].

2.3 Пространства Соболева

Будем рассматривать пространства Соболева, определенные с помощью метрического варианта формулы Ньютона — Лейбница. Введем необходимые понятия.

Пусть $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция. Борелевская функция $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ называется *верхним градиентом* для u , если

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} g ds \quad (1)$$

для всех спрямляемых кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$ с концевыми точками $x, y \in X$. Функция g называется *p -слабым верхним градиентом*, если (1) выполняется для M_p -п. в. кривых γ .

Если $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и Ω — открытое подмножество X , то функция g называется *верхним градиентом для u в Ω* , если g — верхний градиент для u в метрическом пространстве с мерой $(\Omega, d|_{\Omega \times \Omega}, \mu_\Omega)$, где $\mu_\Omega(A) = \mu(\Omega \cap A)$ для любого множества $A \subset X$ (см., например, [35, лемма 3.3.11]). Аналогично определяется *p -слабый верхний градиент в $\Omega \subset X$* .

Пусть $1 \leq p < \infty$. Пространство Соболева $D^{1,p}(\Omega)$, где Ω — открытое множество в X , состоит из измеримых функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих p -слабым верхним градиентом класса $L^p(\Omega, \mu)$ в Ω .

В случае $(X, d, \mu) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, \mathcal{L}^n)$ пространство $D^{1,p}(\Omega)$ совпадает на открытых множествах Ω с пространством $L^{1,p}(\Omega)$ (пространство $L^{1,p}(\Omega)$ состоит из локально интегрируемых функций, обладающих производными в смысле Соболева класса L^p), см., например, [35, предложение 7.1.2]. Равенство $D^{1,p}(\Omega) = L^{1,p}(\Omega)$ основывается на локальном неравенстве Пуанкаре, поэтому оно верно как на группах Карно, так и на римановых многообразиях.

В силу [35, теорема 6.3.20] существует единственный p -слабый верхний градиент для функции $u \in D^{1,p}(X)$ с минимальной L^p -нормой, который далее обозначаем символом $|\nabla_p u|$. В пространстве $D^{1,p}$ вводится полунорма формулой

$$\|u \mid D^{1,p}(X)\| = \inf_{g_u} \|g_u \mid L^p(X)\| = \| |\nabla_p u| \mid L^p(X) \|,$$

где инфимум берется по всем верхним градиентам g_u для u .

Пространство $D^{1,p}_{\text{loc}}(X)$ состоит из измеримых функций $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любой точки $x \in X$ существует окрестность U_x точки x такая, что $u \in D^{1,p}(U_x)$. Пространство $N^{1,p}(X)$ состоит из всех функций $u \in L^p(X) \cap D^{1,p}(X)$. Норма в пространстве $N^{1,p}(X)$ определяется формулой

$$\|u \mid N^{1,p}(X)\| = \|u \mid L^p(X)\| + \|u \mid D^{1,p}(X)\|.$$

Для открытого подмножества $\Omega \subset X$ пространства $D^{1,p}(\Omega)$, $D^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, $N^{1,p}(\Omega)$ и $N^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ определяются аналогично.

Отметим также следующие работы о пространствах Соболева на метрических пространствах с мерой: в [36] описаны различные подходы к определению пространств Соболева; в [37] доказана эквивалентность некоторых определений при минимальных ограничениях на пространства.

2.4 Отображения класса Решетняка

Следующее определение в случае отображений из евклидова пространства в метрическое изначально было введено в работе [38].

Определение 2.2. Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой, (Y, δ) — метрическое пространство. Измеримое отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ принадлежит классу Решетняка $D^{1,p}(X; Y)$, $1 \leq p < \infty$, если существует функция $w \in L^p(X)$ такая, что для любой функции $u_z(y) = \delta(y, z)$, $z \in Y$, композиция $[\varphi]_z = u_z \circ \varphi$ принадлежит пространству $D^{1,p}(X)$, и выполняется поточечное соотношение

$$|\nabla_p [\varphi]_z| \leq w \quad \mu\text{-п. в. в } X. \quad (2)$$

Говорят, что измеримое отображение φ принадлежит классу Решетняка $D^{1,p}_{\text{loc}}(X; Y)$, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U_x в X такая, что $\varphi \in D^{1,p}(U_x; Y)$.

Применяя результаты теории K -пространств, выводим существование наименьшей (в смысле L^p -нормы) функции w_0 , удовлетворяющей неравенству (2) (см. [38, § 1.4]). Функцию w_0 будем обозначать символом $|D_p \varphi|$ и называть *верхним градиентом отображения φ* .

Предложение 2.3. Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой, (Y, δ) — сепарабельное метрическое пространство, $\varphi: X \rightarrow Y$ — измеримое отображение и $1 \leq p < \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $\varphi \in D^{1,p}(X; Y)$,
 (b) для счётного всюду плотного в Y подмножества $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ функции $[\varphi]_{z_j}$ принадлежат $D^{1,p}(X)$, и существует борелевская функция $w \in L^p(X)$ такая, что выполняется поточечная оценка

$$|\nabla_p[\varphi]_{z_j}| \leq w \quad \mu\text{-п. в. в } X,$$

- (c) существует борелевская функция $\overline{w} \in L^p(X)$ такая, что

$$\delta(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \int_{\gamma} \overline{w} ds$$

для M_p -п. в. кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$ с концевыми точками $x, x' \in X$.

- (d) существует борелевская функция $\widehat{w} \in L^p(X)$ такая, что для любой $u \in 1\text{-Lip}(Y)$ композиция $u \circ \varphi$ принадлежит $D^{1,p}(X)$, и выполняется поточечная оценка

$$|\nabla_p(u \circ \varphi)| \leq \widehat{w} \quad \mu\text{-п. в. в } X.$$

Причем наименьшие функции w , $\overline{w}$ и $\widehat{w}$ μ -п. в. совпадают с $|D_p \varphi|$.

Предложение 2.3 доказано в [30, Предложение 2.21].

2.5 Слабое неравенство Пуанкаре

Говорят, что метрическое пространство с мерой допускает слабое p -неравенство Пуанкаре, если существуют константы $C > 0$ и $\tau \geq 1$ такие, что для любого шара $B \subset X$ и любой функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ и любого верхнего градиента g для u выполняется неравенство:

$$\mu(B)^{-1} \int_B |u - u_B| d\mu \leq C \operatorname{diam} B \left(\mu(\tau B)^{-1} \int_{\tau B} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

где u_B — среднее значение u на B : $u_B = \mu(B)^{-1} \int_B u d\mu$. Далее будем говорить просто « p -неравенство Пуанкаре» вместо «слабое p -неравенство Пуанкаре».

Очевидно, что если пространство допускает p -неравенство Пуанкаре, то оно допускает q -неравенство Пуанкаре для любого $q \geq p$. Верно и обратное: если X — полное пространство, μ обладает свойством удвоения и пространство допускает p -неравенство Пуанкаре для некоторого $1 < p < \infty$, то существует $1 \leq q < p$ такое, что X допускает q -неравенство Пуанкаре, см. [39].

Напомним, что метрическое пространство X называется *квазивыпуклым*, если существует константа $C_q > 0$ такая, что любую пару точек x, y можно соединить кривой γ , длина которой удовлетворяет неравенству $\ell(\gamma) \leq C_q d(x, y)$.

Если X — полное метрическое пространство с мерой, μ удовлетворяет условию удвоения, и, кроме того, X допускает p -неравенство Пуанкаре при $1 \leq p < \infty$, то X — квазивыпуклое метрическое пространство. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [40].

В пространствах, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре, выполняется теорема о продолжении $N^{1,p}$ -функции, определенных в равномерных областях. Приведем необходимые понятия.

Говорят, что Ω — *равномерная область*, если существует константа $C_u < \infty$ такая, что любые две точки $x, y \in \Omega$ можно соединить кривой $\gamma \subset \Omega$, причем $\ell(\gamma) \leq C_u d(x, y)$ и для любых $z \in \gamma$ выполняется неравенство

$$\min(\ell(\gamma_{x,z}), \ell(\gamma_{z,y})) \leq C_u \operatorname{dist}(z, X \setminus \Omega),$$

где $\gamma_{x,z}$ — наименьшая подкривая в γ , соединяющая точки x и z .

Область Ω обладает свойством продолжения для пространства $N^{1,p}$, если существует ограниченный оператор $E: N^{1,p}(\Omega) \rightarrow N^{1,p}(X)$ такой, что $Ef = f$ μ -п. в. в Ω для любой функции $f \in N^{1,p}(\Omega)$.

Следующее предложение доказано в [41, Предложение 5.9].

Предложение 2.4 ([41]). Пусть X удовлетворяет p -неравенству Пуанкаре при $1 \leq p < \infty$. Тогда любая равномерная область в X обладает свойством продолжения для пространства $N^{1,p}$.

2.6 Емкость конденсатора

Как обычно, область — открытое связное подмножество в X . Говорят, что E — *континуум*, если E — компактное связное подмножество в X ; если континуум E содержит хотя бы две точки, то E — *невыврожденный континуум*.

Пусть $1 \leq p < \infty$, E, F — континуумы в открытом подмноестве Ω .

Емкость конденсатора $\mathcal{E} = (E, F)$ определяется формулой

$$\text{cap}_p(\mathcal{E}; \Omega) = \inf_{\Omega} \int g_u^p d\mu,$$

где инфимум берется по всем верхним градиентам g_u для функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $u|_E \geq 1$ и $u|_F \leq 0$. Такие функции u будем называть *допустимыми функциями для конденсатора $\mathcal{E}$* .

Рассматривая различные классы допустимых функций, можно определить различные емкости конденсаторов, например, требовать непрерывность функции u . Всегда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(\mathcal{E}; \Omega) &\leq \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(\Omega)) \\ &\leq \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)) \leq \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(\Omega) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)). \end{aligned} \quad (3)$$

При дополнительных требованиях на пространство в соотношениях (3) выполняется равенство.

Предложение 2.5 ([42, Теорема 1.1]). Пусть X — метрическое пространство с мерой, μ обладает свойством удвоения, X обладает свойством Гейне — Бореля и в X выполняется p -неравенство Пуанкаре для некоторого $1 < p < \infty$. Если Ω — область, E, F — непересекающиеся континуумы в Ω , то выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} M_p(\Delta(E, F, \Omega)) &= \text{cap}_p(\mathcal{E}; \Omega) \\ &= \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)) = \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(\Omega) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}$ — конденсатор (E, F) и $\Delta(E, F, \Omega)$ — семейство всех спрямляемых кривых в Ω , соединяющих E и F .

Очевидно, что емкость конденсатора монотонна по включению пластин конденсатора и объемлющих областей.

2.7 Оценки емкости конденсаторов

В работе [43] были получены оценки на модуль семейства кривых, соединяющих пластины концентрического сферического конденсатора. Используя предложение 2.5, сформулируем эти оценки в нужной нам форме.

Далее в этом параграфе (X, d, μ) — локально связное пространство со свойством Гейне — Бореля, X — Q -регулярно по Альфорсу, $Q \geq 2$, в X выполняется p_0 -неравенство Пуанкаре для некоторого p_0 .

Предложение 2.6 ([43, Теорема 3.1]). Пусть $0 < 2r < R$. Обозначим $\mathcal{E} = (B(x, r), \partial B(x, R))$. Тогда при $1 \leq p < Q$ выполняется оценка сверху

$$\text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(B(x, R))) \leq K \frac{C(R, r/4)}{C(R, 2r)^p},$$

где $C(R, r) = (2^\alpha - 2)^{-1}(r^{1-\alpha} - R^{1-\alpha})$, $\alpha = \frac{Q-1}{p-1}$ и K — некоторая константа, зависящая от параметров пространства X . При $p = Q$ выполняется оценка

$$\text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(B(x, R))) \leq K' \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1-Q},$$

где K' — некоторая постоянная, зависящая от параметров пространства X .

Замечание 2.7. Отметим, что если $E_k \subset B(x, r_k) \subset B(x, R)$ для фиксированного x и $r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то в силу предложения 2.6 выполняется соотношение $\text{cap}((E_k, F); D^{1,p}(B(x, R))) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где $1 \leq p \leq Q$.

Также имеет место следующая оценка снизу (напомним, что $Q \geq 2$ — показатель регулярности по Альфорсу, в пространстве X выполняется p_0 -неравенство Пуанкаре).

Предложение 2.8 ([43, Предложение 4.7]). Допустим, что $Q-1 < p_0 \leq Q$. Пусть также E, F — континуумы, содержащиеся в шаре $B(x, R) \subset X$, $\mathcal{E} = (E, F)$. Тогда при $p_0 \leq p \leq Q$ имеет место следующая оценка снизу:

$$\text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(X)) \geq \frac{1}{K''} \frac{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}{R^{1+p-Q}},$$

где константа $K'' \geq 1$ зависит лишь от параметров пространства X .

Замечание 2.9. Допустим, что $Q-1 < p_0 \leq p \leq Q$ и $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}, F, \text{diam } F > 0$, суть континуумы, содержащиеся в шаре $B(x, R)$ для некоторых $x \in X$, $R < \infty$. Тогда ввиду предложения 2.8 из сходимости

$$\text{cap}((E_k, F); D^{1,p}(X)) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

следует сходимость $\text{diam } E_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

§ 3. Ёмкостная метрическая функция

Здесь и далее (X, d, μ) — локально связное пространство со свойством Гейне — Бореля, X — Q -регулярно по Альфорсу, $Q \geq 2$, в X выполняется p_0 -неравенство Пуанкаре для $Q-1 < p_0 \leq Q$. В силу теоремы Мазуркевича — Мура — Менгера пространство (X, d) локально линейно связно (см., например, [44, Гл. 6, § 50(II), теорема 1]); локальная линейная связность пространства X также следует из выполнения неравенства Пуанкаре (см. § 2.5).

3.1 Свойства емкостной метрической функции

Начнем с доказательства леммы о связи емкости и диаметра пластин. Благодаря лемме 3.1 сходимость по емкостной метрике будет эквивалентна сходимости по объемлющей метрике d . Первоначальное доказательство леммы 3.1 (в случае евклидовых пространств) можно найти в работе [25].

Лемма 3.1. Пусть D — область в X , $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность континуумов, содержащихся в шаре B_0 , и F — фиксированный невырожденный континуум. При условии $r_0 \leq r \leq Q$ сходимость

$$\text{cap}((E_k, F); D^{1,p}(D)) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\text{diam } E_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций такая, что каждая функция u_k допустима для конденсатора (E_k, F) , $k = 1, 2, \dots$, и соответствующая последовательность верхних градиентов $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ стремится к нулю в $L^p(D, \mu)$. Ввиду предложения 2.5 можем считать, что все функции u_k , $k \in \mathbb{N}$, непрерывны.

Рассмотрим кривую $\gamma \subset D$, соединяющую B_0 и F . Такая кривая в области D существует, так как (X, d) локально линейно связно, а D — область. Рассмотрим ограниченную область $(\varepsilon$ -раздутие множества $B_0 \cup \gamma \cup F)$

$$D_\varepsilon = (1 + \varepsilon)B_0 \cup \bigcup_{x \in \gamma} B(x, \varepsilon) \cup \bigcup_{y \in F} B(y, \varepsilon).$$

В силу свойства Гейне — Бореля существует такое $\varepsilon > 0$, что $D_\varepsilon \Subset D$. В силу [45, Теорема 1.1] существует равномерная область $D_O \Subset D$, содержащая D_ε . Так как пространство допускает p -неравенство Пуанкаре, существует ограниченный оператор продолжения $E: N^{1,p}(D_O) \rightarrow N^{1,p}(X)$ такой, что $Ef(x) = f(x)$ μ -п. в. при $x \in D_O$, см. предложение 2.4.

Обозначим продолжение функции u_k тем же символом. Тогда выполняется соотношение

$$\text{cap}((E_k, F); D^{1,p}(X)) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, так как континуумы E_k содержатся в шаре B_0 , существует некоторый шар B_R радиуса R , содержащий и шар B_0 , и континуум F . В таком случае имеет место оценка (см. теорему 2.8)

$$\text{cap}((E_k, F); D^{1,p}(X)) \geq \frac{1}{K''} \frac{\min\{\text{diam } E_k, \text{diam } F\}}{R^{1+p-Q}}.$$

Отсюда заключаем, что $\text{diam } E_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (см. также замечание 2.9).

Достаточность. Допустим противное: $\text{diam}(E_k) \rightarrow 0$ и существует константа β такая, что выполняется неравенство

$$\text{cap}_p(E_k, F, D) \geq \beta > 0 \quad \text{для всех } k.$$

Так как $\text{diam}(E_k) \rightarrow 0$ и пространство обладает свойством Гейне — Бо-реля, можно считать, что некоторая подпоследовательность континуумов $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (обозначена тем же символом) содержится в достаточно малом шаре B_ε и существует шар B_r такой, что дополнение $D \setminus B_r$ содержит фиксированный континуум F . Используя монотонность емкости и предложение 2.6 (см. также замечание 2.7), приходим к противоречию. $\square$

Фиксируем континуум F в области D такой, что $D \setminus F$ — связное множество.

Определение 3.2. Емкостная метрическая функция между точками x, y из $D \setminus F$ определяется формулой

$$\rho_{p,F}(x, y) = \inf \text{cap}((\gamma, F); D^{1,p}(D))^{1/p},$$

где инфимум берется по емкостям конденсаторов (γ, F) , где γ — произвольная кривая в $D \setminus F$ с концевыми точками $x, y \in D \setminus F$.

Емкостная метрика определена в работе [22], см. также [23], в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с конформным показателем $p = n$, в которых были получены базовые свойства этой метрики. Дальнейшее применение данной концепции — это рассмотрение весовой емкостной метрики в $\mathbb{R}^n$ при $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), см. [25].

Покажем, что емкостная метрическая функция — метрика.

Теорема 3.3. В случае $p_0 \leq p \leq Q$ метрическая функция $\rho_{p,F}$ — метрика в области $D \setminus F$.

Доказательство. Симметричность $\rho_{p,F}(x, y) = \rho_{p,F}(y, x)$ очевидно следует из определения.

Покажем, что для любых точек $x, y, z \in D \setminus F$ выполнено неравенство треугольника. Пусть γ_1 — кривая с концевыми точками x, y такая, что $\rho_{p,F}(x, y) + \varepsilon/2 \geq \text{cap}((\gamma_1, F); D^{1,p}(D))^{1/p}$, и γ_2 — кривая с концевыми точками y, z , обладающая аналогичным свойством. Пусть также u_1, u_2 — такие допустимые функции для конденсаторов (γ_1, F) и (γ_2, F) соответственно, что

$$\text{cap}((\gamma_i, F); D^{1,p}(D))^{1/p} + \varepsilon/2 \geq \left(\int_D g_{u_i}^p d\mu \right)^{1/p} \quad (i = 1, 2).$$

Тогда кривая $\gamma_1 \cup \gamma_2$ соединяет точки x, z и функция $u_1 + u_2$ допустима для конденсатора $(\gamma_1 \cup \gamma_2, F)$. Используя это, выводим следующие соотношения

$$\begin{aligned} \rho_{p,F}(x, z) &\leq \text{cap}((\gamma_1 \cup \gamma_2, F); D^{1,p}(D))^{1/p} \\ &\leq \left(\int_D g_{u_1+u_2}^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_D g_{u_1}^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_D g_{u_2}^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq \rho_{p,F}(x, y) + \rho_{p,F}(y, z) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое.

Допустим, что $\rho_{p,F}(x, y) = 0$, но $x \neq y$. Тогда существуют кривые $(\gamma_l)_{l \in \mathbb{N}}$ с концевыми точками x, y для всех $l \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\text{cap}((\gamma_l, F); D^{1,p}(D)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, точка x содержится в некотором шаре $B(x, r)$, при этом, $\text{cl } B(x, r)$ не пересекается с точкой y . Следовательно, $\text{diam}(\gamma_l) \geq r$, что противоречит лемме 3.1.

Осталось показать, что $\rho_{p,F}(x, x) = 0$. В силу квазивыпуклости пространства для любого $r > 0$ в шаре $B(x, C_q r)$, где C_q — константа квазивыпуклости, существует замкнутая кривая, содержащая точку x . Емкость конденсатора $(B(x, C_q r), F)$ стремится к 0 при $r \rightarrow 0$ (см. лемму 3.1), поэтому $\rho_{p,F}(x, x) = 0$. $\square$

Связь топологии объемлющего пространства с топологией, индуцированной емкостной метрикой, установлена в следующих утверждениях.

Лемма 3.4. Пусть $y \in D \setminus F$ и $y_l \in D \setminus F$, $l = 1, 2, \dots$, — некоторая последовательность. Тогда следующие утверждения эквивалентны

- (a) $\rho_{p,F}(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$,
- (b) $d(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\rho_{p,F}(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Допустим противное: последовательность $d(y_l, y)$ не стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Значит, существует подпоследовательность (обозначена тем же символом $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$) такая, что $d(y_l, y) \geq \beta > 0$ для некоторого числа β . Рассмотрим кривые γ_l такие, что

$$\text{cap}((\gamma_l, F); D^{1,p}(D)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

Обозначим символом $\tilde{\gamma}_l$ сужение кривой γ_l до «первого выхода» из шара $B(y, r_0)$, следовательно, $\text{diam } \tilde{\gamma}_l \geq r_0$ и имеет место сходимость

$$\text{cap}((\tilde{\gamma}_l, F); D^{1,p}(D)) \rightarrow 0$$

в силу монотонности емкости. С другой стороны, по лемме 3.1 имеет место сходимость $\text{diam } \tilde{\gamma}_l \rightarrow 0$. Приходим к противоречию.

Пусть $d(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Введем в рассмотрение окрестности $B(y, r)$. Тогда, начиная с некоторого номера l_0 , все точки y_l , $l \geq l_0$, попадают в шар $B(y, r)$. В силу квазивыпуклости пространства существуют кривые $\gamma_l \subset B(y, C_q r)$ с концевыми точками y и y_l , для которых выполняется оценка

$$\text{cap}((\gamma_l, F); D^{1,p}(D)) \leq \text{cap}((B(y, C_q r), F); D^{1,p}(D)),$$

где последняя емкость стремится к 0 при $r \rightarrow 0$. Значит, в силу леммы 3.1 имеет место сходимость $\rho_{p,F}(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. $\square$

Если X — некомпактное топологическое пространство, обозначим символом $\overline{X}$ одноточечную компактификацию (компактификацию Александера), см., например, [44, гл. 4, § 41(X), теорема 5]. Присоединенную точку будем обозначать символом ∞ . Напомним, что окрестности точки ∞ суть все дополнения вида $X \setminus K$, где K — произвольное компактное множество в X .

Лемма 3.5. Пусть $y_l \in D \setminus F$, $l = 1, 2, \dots$, — фундаментальная последовательность относительно метрики $\rho_{p,F}$ и y — частичный предел $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ в топологии $\overline{X}$. Тогда выполнено следующее:

- (a) если $y \in D \setminus F$, то $d(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;
- (b) если $y \in F$, то $d(y_l, y) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;
- (c) если $y \in \partial D$ и последовательность y_l ограничена, то $\text{dist}(y_l, \partial D) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;
- (d) если $y = \infty$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} d(y_l, x_0) = \infty$ для некоторой точки $x_0 \in X$, то $y_l \rightarrow y$ при $l \rightarrow \infty$ в топологии $\overline{X}$;
- (e) если $y = \infty$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} d(y_l, x_0) < \infty$ для некоторой точки $x_0 \in X$, то $\text{dist}(y_{l_k}, \partial D) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для любой ограниченной подпоследовательности $(y_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Лемма 3.5 доказывается с помощью очевидных модификаций рассуждения, приведенного в [25, Предложение 2.11].

3.2 Пополнение области и граничные элементы

Пусть F — фиксированный континуум в области D такой, что $D \setminus F$ связно и $p_0 \leq p \leq Q$. Обозначим символом $D_{\rho,p}$ метрическое пространство

$D \setminus F$ с метрикой $\rho_{p,F}$. Определим отношение эквивалентности на фундаментальных в метрике $\rho_{p,F}$ последовательностях $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(z_l)_{l \in \mathbb{N}}$ в $D_{\rho,p}$ по правилу

$$(y_l)_{l \in \mathbb{N}} \sim (z_l)_{l \in \mathbb{N}} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \rho_{p,F}(y_l, z_l) = 0.$$

Тогда множество классов эквивалентных последовательностей с метрикой

$$\rho_{p,F}(h_1, h_2) = \lim_{l \rightarrow \infty} \rho_{p,F}(x_l, y_l),$$

где $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ суть представители классов h_1 , h_2 соответственно, образует метрическое пространство. Полученное метрическое пространство обозначим символом $\overline{D_{\rho,p}}$. По теореме Хаусдорфа (см. [46]) пространство $\overline{D_{\rho,p}}$ — полное метрическое пространство. Далее если $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в метрике $\rho_{p,F}$, то символом $[(x_l)_{l \in \mathbb{N}}]$ будем обозначать класс эквивалентности данной последовательности.

Сформулируем возможное поведение представителей классов в пространстве $\overline{D_{\rho,p}}$.

Теорема 3.6. Пусть $h \in \overline{D_{\rho,p}}$ — класс эквивалентности последовательностей и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель класса h . Тогда возможно следующее поведение $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$:

(a) $y_l \rightarrow y \in D \setminus F$ в метрике d объемлющего пространства при $l \rightarrow \infty$, и предел y не зависит от выбора представителя $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$;

(b) $y_l \rightarrow y \in F$ в метрике d объемлющего пространства при $l \rightarrow \infty$, и предел y не зависит от представителя $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$.

В противном случае выполняется следующее:

(c) если последовательность $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ограничена в метрике d , то имеет место сходимость $\text{dist}(y_l, \partial D) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$;

(d) если $\liminf_{l \rightarrow \infty} d(y_l, x_0) < \infty$ для некоторой точки $x_0 \in D$, то выполняется

$$\text{dist}(y_{l_k}, \partial D') \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

для любой ограниченной подпоследовательности $(y_{l_k})_{k \in \mathbb{N}}$;

(e) если $\liminf_{l \rightarrow \infty} d(y_l, x_0) = \infty$ для некоторой точки $x_0 \in D$, то последовательность $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $y = \infty$ в топологии пространства $\overline{X}$.

В доказательстве теоремы 3.6 следует применить лемму 3.5. В случае евклидовых пространств доказательство теоремы 3.6 приведено в [25, Предложение 2.17].

При пополнении $D \setminus F$ по емкостной метрике $\rho_{p,F}$ точки $y \in D \setminus F$ отождествляются естественным образом с классом эквивалентности постоянной последовательности $i(y) = (y, y, \dots)$. Из теоремы 3.6 выводим,

что если $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — представитель класса $h \in \overline{D_{\rho,p}}$ и $y_l \rightarrow y \in D \setminus F$ в объемлющей метрике d при $l \rightarrow \infty$, то h совпадает с классом $[i(y)]$ последовательности $i(y)$.

Обозначим символом $[D]$ все классы фундаментальных последовательностей в емкостной метрике, частичные пределы которых в метрике d объемлющего пространства принадлежат D .

Определение 3.7. Дополнение $H_{\rho,p}(D) = \overline{D_{\rho,p}} \setminus [D]$ называется *емкостной границей* области D . Метрика на $H_{\rho,p}(D)$ — это сужение метрики $\rho_{p,F}$.

Классы эквивалентности в $H_{\rho,p}$ называются *граничными емкостными элементами*.

Определим носитель граничного элемента.

Определение 3.8. Пусть $h \in H_{\rho,p}(D)$. Тогда *носитель* $\mathcal{S}(h)$ граничного элемента h — совокупность всех частичных пределов представителей $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ в топологии пространства $\overline{X}$.

Из теоремы 3.6 следует, что $\mathcal{S}(h) \subset \partial D \cup \{\infty\}$ для любого граничного элемента $h \in H_{\rho,p}$.

Следующие утверждения содержат основные свойства носителей граничных элементов. Доказательство этих утверждений в метрических пространствах с мерой может быть получено аналогично доказательству в евклидовом случае, см. [25].

Предложение 3.9. Верны следующие утверждения:

(a) носитель граничного элемента $\mathcal{S}(h)$ совпадает с пересечением

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \text{cl}(B_\rho(h, \varepsilon) \cap D),$$

где замыкание берется в топологии $\overline{X}$;

(b) если $\rho_{p,F}(h_1, h_2) = 0$ для двух граничных элементов $h_1, h_2 \in H_{\rho,p}$, то их носители совпадают $\mathcal{S}(h_1) = \mathcal{S}(h_2)$.

Предложение 3.10. Носитель $\mathcal{S}(h)$ любого граничного элемента $h \in H_{\rho,p}$ связан в топологии $\overline{X}$.

Предложение 3.11. Пусть $\mathcal{S}(h)$ — носитель граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$. Тогда для любой последовательности $(y_l)_{l \in \mathbb{N}} \in h$ имеет место сходимость $y_l \rightarrow \mathcal{S}(h)$ в топологии $\overline{X}$.

Сформулируем критерий одноточечного носителя.

Предложение 3.12. Пусть $h \in H_{\rho,p}(D)$ — граничный элемент. Носитель $\mathcal{S}(h)$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда для любых фундаментальных последовательностей $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}, (x_l)_{l \in \mathbb{N}} \in h$ существуют кривые γ_l с концевыми точками x_l, y_l для всех $l = 1, 2, \dots$ такие, что $\text{diam}(\gamma_l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

3.3 Граничные элементы в различных областях

В данном подразделе рассмотрим как устроены граничные элементы в различных областях.

Лемма 3.4 гарантирует, что сходимость к внутренним точкам по емкостной метрике и метрике d объемлющего пространства равносильны. Это наблюдение лежит в основе следующего утверждения.

Предложение 3.13. Пусть D — ограниченная область со свойством продолжения для пространства $N^{1,p}$. Тогда $H_{\rho,p}(D) = \partial D$ в следующем смысле: любой граничный элемент имеет одноточечный носитель и любая точка границы лежит в носителе емкостного граничного элемента.

Доказательство. Пусть ρ — емкостная метрика в D , $\tilde{\rho}$ — емкостная метрика в X . Так как D обладает свойством продолжения, выполняются неравенства

$$\frac{1}{C}\tilde{\rho}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \tilde{\rho}(x, y)$$

для всех $x, y \in D \setminus F$, где F — фиксированный континуум и C — норма оператора продолжения.

Используя лемму 3.4 заключаем, что сходимость по емкостной метрике ρ равносильна сходимости по метрике d в замыкании $\text{cl } D$. $\square$

Например, любая равномерная область обладает свойством продолжения (см. предложение 2.4), поэтому для равномерных областей в пространствах с p -неравенством Пуанкаре емкостная граница и топологическая граница совпадают.

Рассмотрим теперь области с границей, состоящей из достижимых точек. Говорят, что $x \in \partial D$ — *достижимая точка*, если существует непрерывная кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{cl } D$ такая, что $\gamma([0, 1)) \subset D$ и $\gamma(1) = x$.

Предложение 3.14. Пусть D — ограниченная область и $x \in \partial D$ — достижимая точка. Тогда существует граничный элемент $h \in H_{\rho,p}(D)$ такой, что $x \in \mathcal{S}(h)$.

Доказательство. Пусть γ — кривая такая, что $\gamma(1) = x$ и $\gamma([0, 1)) \subset D$. Выберем последовательность точек $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ на γ так, чтобы $d(x_k, x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Покажем, что последовательность точек $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальна в емкостной метрике. Действительно, раз точки $x_m = \gamma(t_m)$, $x_l = \gamma(t_l)$, $t_m > t_l$, принадлежат кривой γ , то, применяя монотонность емкости, выводим неравенства

$$\begin{aligned} \rho_p(x_m, x_l) &\leq \text{cap}((\gamma|_{[t_l, t_m]}, F); D^{1,p}(D))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \text{cap}((B(x, r), F); D^{1,p}(D))^{\frac{1}{p}} \leq \text{cap}((B(x, r), F); D^{1,p}(X))^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

где $r > 0$ — такой радиус, что $\gamma|_{[t_l, t_m]} \subset B(x, r)$. Следовательно, выполняется равенство $\overline{\lim}_{m, l \rightarrow \infty} \rho_p(x_m, x_l) = 0$.

Аналогично доказывается, что любые последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \gamma$ и $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \gamma$, сходящиеся к точке x , эквивалентны в емкостной метрике.

Значит, существует граничный элемент $h \in H_{\rho,p}(D)$, $h = [(x_k)_{k \in \mathbb{N}}]$. По построению выполняется включение $x \in \mathcal{S}(h)$. $\square$

Замечание 3.15. В случае, когда область D не ограничена, нужно учитывать емкость присоединенной точки ∞ . Емкость конденсатора $(\{\infty\}, F)$ в пространстве $D^{1,p}(D)$ определяется формулой

$$\text{cap}((\{\infty\}, F); D^{1,p}(D)) = \int_D |\nabla_p u|^p d\mu,$$

где инфимум берется по всем функциям u таким, что $u|_{U \cap D} \geq 1$ и $u|_F \leq 0$, где U — произвольная окрестность точки $\{\infty\}$.

Тогда предложение 3.14 в случае $x = \{\infty\}$ формулируется так: если D — неограниченная область и $\{\infty\}$ — достижимая точка, причем $\text{cap}((\{\infty\}, F); D^{1,p}(D)) = 0$, то точка $\{\infty\}$ принадлежит носителю некоторого емкостного граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$.

Определим понятие μ -связности в граничных точках (см., например, [14, 16]).

Определение 3.16. (a) Область D называется *локально связной* в точке $x \in \partial D \cup \{\infty\}$, если любая окрестность U точки x содержит подокрестность $V \subset U$ такую, что множество $V \cap D$ связно.

(b) Область D называется *локально μ -связной* в точке $x \in \partial D \cup \{\infty\}$, если любая окрестность U точки x содержит подокрестность $V \subset U$, состоящую из μ связных компонент $V_1, V_2, \dots, V_\mu$ таких, что каждая компонента V_i локально связна в точке x для всех $i = 1, 2, \dots, \mu$.

В частности, область D локально связна в точке $x \in \partial D$, если D локально 1-связна в этой точке.

(c) Область D *конечно связна* в точке $x \in \partial D \cup \{\infty\}$, если область μ -связна для некоторого $\mu \in \mathbb{N}$ в этой точке.

Понятно, что граничные точки областей с конечно связной границей достижимы. Из предложения 3.14 следует, что любая граничная точка с конечно связной границей содержится в носителе некоторого емкостного граничного элемента. Следующая лемма уточняет это утверждение.

Лемма 3.17. *Выполняются следующие утверждения:*

(а) *если область D локально связна в точке $x \in \partial D$, то любые два граничных элемента $h_1, h_2 \in H_{\rho,p}(D)$, носители которых пересекаются в точке x , совпадают;*

(б) *если область D локально μ -связна в точке $x \in \partial D$, то граничные элементы $h_1, h_2, \dots, h_\mu, h_{\mu+1} \in H_{\rho,p}(D)$, носители которых пересекаются в точке x , не могут быть различны: как минимум, два из них совпадают.*

Доказательство. С очевидными модификациями, эта лемма доказывается аналогично евклидову случаю [25, Следствие 2.34]. $\square$

Результаты [47, § 4] о сравнении естественных границ (границы простых концов, границы Мазуркевича и т. д.) и емкостной границы в области с локально конечно связной границей, очевидно, выполняются и в случае метрических пространств с мерой.

Рассмотрим различные примеры пространств, в которых применимы полученные результаты.

Пример 3.18. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ — n -регулярное по Альфорсу пространство, обладающее свойством Гейне — Бореля, причем в $\mathbb{R}^n$ выполняется 1-неравенство Пуанкаре.

Описание емкостных граничных элементов в различных областях можно найти в работах [23, 25, 47].

Пример 3.19. Группа Карно G (модельный пример субримановой геометрии) — пример регулярного по Альфорсу пространства, обладающее свойством Гейне — Бореля, в группе Карно выполняется 1-неравенство Пуанкаре, см. [48].

Таким образом, результаты настоящей работы (§§ 3–4) применимы в областях группы Карно. Подробнее о группах Карно, см., например, [49, 50].

Пример 3.20. Понятно, что компактные римановы многообразия обладают теми же свойствами, что и евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

В случае некомпактных пространств нужно учитывать эффекты, возникающие «на больших масштабах». Например, полное некомпактное риманово многообразие M с ограниченной снизу кривизной Риччи $\text{Ric}_M \geq -Kg$, $K \geq 0$, — метрическое пространство с мерой, причем мера обладает локальным свойством удвоения в силу теоремы Бишоп — Громова (см.,

например, [51]); также в M выполняется 2-неравенство Пуанкаре (см. [52]). Подробнее см., например, [53, § 10.1] и [35, Гл. 14, § 2] и библиографию там же.

В работе [47] доказан более слабый вариант леммы 3.1. Основное отличие в доказательстве — возможность перехода в локальные карты и применение известных свойств емкости в евклидовых пространствах. В метрических пространствах с мерой, очевидно, это недоступно.

Пример 3.21. Рассмотрим пример, отличный от риманова многообразия и группы Карно. Пусть $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ — изометрическое вложение, например, $x \mapsto i(x) = (x, 0, 0, 0)$; $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^1$ — изометрическое вложение $\mathbb{R}$ в группу Гейзенберга с экспоненциальными координатами (координаты 1 рода), например, $x \mapsto j(x) = (x, 0, 0, 0)$. Далее будем отождествлять $\mathbb{R}$ с $i(\mathbb{R})$ и $j(\mathbb{R})$.

Тогда пространство $X = \mathbb{R}^4 \sqcup_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^1$ — дизъюнктное объединение $\mathbb{R}^4 \sqcup \mathbb{H}^1$, где отождествляются точки $x \in \mathbb{R}$: $i(x) = j(x)$. Метрика в пространстве X задается формулой

$$d(x, y) = \inf\{d_e(x, a) + d_c(a, y) \mid a \in \mathbb{R}\},$$

где $x \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{H}^1$, d_e — метрика в $\mathbb{R}^4$, d_c — метрика Карно — Каратеодори в $\mathbb{H}^1$. Для остальных пар точек метрика d совпадает с метрикой в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{H}^1$.

Мера μ задается как сумма мер Лебега пересечений с соответствующими пространствами. Так как пространства $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{H}^1$ — 4-регулярные пространства по Альфорсу, пространство (X, d, μ) тоже 4-регулярно по Альфорсу. Благодаря [54, Теорема 6.15] в пространстве X выполняется p -неравенство Пуанкаре при $p > 3$.

§ 4. Граничное поведение отображений

Напомним предположения о пространстве: (X, d, μ) — локально связное пространство со свойством Гейне — Бореля, X — Q -регулярно по Альфорсу, $Q \geq 2$, в X выполняется p_0 -неравенство Пуанкаре для $Q - 1 < p_0 \leq Q$. Символом (Y, δ) обозначаем сепарабельное метрическое пространство.

В работах [30, 31, 32] получен следующий критерий для гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченные операторы композиции пространств Соболева.

Напомним необходимые понятия. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм класса Решетняка $D_{\text{loc}}^{1,p}(X; Y)$, $1 \leq p < \infty$. Говорят, что φ — *отображение с конечным искажением*, если

$$|D_p \varphi|(x) = 0 \quad \text{для } \mu\text{-п. в.} \quad x \in Z_\varphi = \{x' \in X \mid \mathcal{J}\varphi(x') = 0\}.$$

Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм класса $D_{\text{loc}}^{1,p}(X; Y)$, $1 \leq p < \infty$, с конечным искажением. Операторная функция искажения $K_{q,p}(\cdot, \varphi)$ определяется формулой

$$K_{q,p}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D_q \varphi|(x)^{\frac{1}{p}}}{(\mathcal{J}\varphi(x))^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \mathcal{J}\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что в силу конечности искажения φ функция $K_{q,p}(\cdot, \varphi)$ корректно определена.

Мера μ называется *мерой Радона*, если любое компактное подмножество $K \subset X$ имеет конечную меру: $\mu(K) < \infty$, и для любого μ -измеримого множества A имеет место следующее равенство (ср. с леммой 2.1):

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid A \supset K \text{ — компактное подмножество}\}.$$

В случае, когда (X, d) , например, локально компактно, то мера μ — мера Радона. В [35, Предложение 3.3.46] приведен критерий, когда μ — мера Радона в метрическом пространстве с мерой. В [34, гл. 2] изложены основные свойства мер Радона в хаусдорфовых локально компактных пространствах.

Теорема 4.1. Пусть (X, d, μ) , (Y, δ, ν) — метрические пространства с мерой, причем μ — мера Радона. Пусть также $\varphi: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, $1 \leq q \leq p < \infty$ и $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $q < p$, и $\sigma = \infty$, если $q = p$.

Отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^*: D^{1,p}(Y) \cap \text{Lip}(Y) \rightarrow D^{1,q}(X)$$

тогда и только тогда, когда

- (a) $\varphi \in D_{\text{loc}}^{1,q}(X; Y)$,
- (b) φ имеет конечное искажение,
- (c) операторная функция искажения $K_{q,p}(x, \varphi) \in L^\sigma(X)$.

При этом, имеет место равенство $\|K_{q,p}(\cdot, \varphi) \mid L^\sigma(X)\| = \|\varphi^*\|$. Более того, при $q < p$ следующие функции множеств совпадают:

$$\Psi(U) = \int_{\varphi^{-1}(U)} K_{q,p}(x, \varphi)^\sigma d\mu,$$

для любого открытого $U \subset Y$, где Ψ — мера ассоциированная с оператором φ^* .

Гомеоморфизмы φ областей метрических пространств с мерой, удовлетворяющих условиям (a)–(c) теоремы 4.1, будем называть $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмами.

Пусть φ — $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизм. Пусть также E, F — континуумы в Y , положим $\mathcal{E} = (E, F)$. Если u — непрерывная допустимая функция для конденсатора $\mathcal{E}$, то $u \circ \varphi$ — допустимая функция для конденсатора $\varphi^{-1}\mathcal{E} = (\varphi^{-1}(E), \varphi^{-1}(F))$ и выполняется неравенство

$$\text{cap}(\varphi^{-1}\mathcal{E}; D^{1,q}(X))^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi^*\| \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(Y))^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, если f — обратный гомеоморфизм к $\varphi \in \mathcal{Q}_{q,p}$, то для любого конденсатора $\mathcal{E}$ в Y выполняется неравенство

$$\text{cap}(f\mathcal{E}; D^{1,q}(X))^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi^*\| \text{cap}(\mathcal{E}; D^{1,p}(Y))^{\frac{1}{p}}. \quad (4)$$

Класс гомеоморфизмов $f = \varphi^{-1}$, где $\varphi \in \mathcal{Q}_{q,p}$, будем обозначать символом $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$.

Докажем теорему о граничном поведении для $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$ -гомеоморфизмов, см. работы [22, 25], где эта теорема установлена в случае евклидовых пространств.

Теорема 4.2. Пусть D, D' — области в метрических пространствах с мерой (X, d, μ) и (Y, δ, ν) , пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$, $p_0 \leq q \leq p \leq Q$.

Тогда $f: (D \setminus F, \rho_{p,F}) \rightarrow (D' \setminus f(F), \rho_{q,f(F)})$ — липшицево отображение в емкостных метриках, где F — такой фиксированный континуум, что $D \setminus F$ связно. Существует единственное продолжение $\bar{f}$ на пополнения пространств по емкостным метрикам, более того, $\bar{f}$ переводит емкостные граничные элементы $H_{\rho,p}(D)$ в емкостные граничные элементы $H_{\rho,q}(D')$.

Доказательство. Благодаря неравенству (4) для любых точек $x, y \in D \setminus F$ и любой кривой $\gamma \subset D \setminus F$ с концевыми точками x, y выполняется соотношение

$$\text{cap}((f(\gamma), f(F)); D^{1,q}(X))^{\frac{1}{q}} \leq K \text{cap}((\gamma, F); D^{1,p}(Y))^{\frac{1}{p}},$$

где K — некоторая константа. Отсюда выводим, что для любых точек $x, y \in D \setminus F$ выполняется неравенство

$$\rho_{q,f(F)}(f(x), f(y)) \leq K \rho_{p,F}(x, y).$$

Таким образом, первая часть утверждения доказана.

Существует единственное продолжение липшицевого отображения на пополнения метрических пространств. Обозначим это продолжение символом $\bar{f}$. Покажем, что образ емкостного граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$ —

емкостной граничный элемент $\bar{f}(h) \in H_{\rho,q}(D')$. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — представитель h ; тогда последовательность $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ не имеет подпоследовательностей, сходящихся к внутренним точкам D' , поэтому $[(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}]$ — емкостной граничный элемент. $\square$

Рассмотрим одно из приложений теоремы 4.2: теорема Кёбе для $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$ -гомеоморфизмов. В 1915 г. Кёбе [55] доказал, что для конформного отображения $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ односвязной области Ω в единичный круг $\mathbb{D}$ существует предел по любому разрезу дугой (arcwise limit along end-cut).

Пусть $f: D \rightarrow D'$ — некоторое отображение и $x \in \partial D$. Напомним, что x называется достижимой точкой, если существует непрерывная кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{cl } D$ такая, что $\gamma([0, 1)) \subset D$ и $\gamma(1) = x$; такие кривые будем называть *разрезом*. Ясно, что если x — достижимая точка по разрезу γ , то существует емкостной граничный элемент h_x такой, что $x \in \mathcal{S}(h_x)$ (подробнее, см. предложение 3.14); будем говорить, что h_x *ассоциирован с точкой x по разрезу γ* .

Говорят, что последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *сходится вдоль разреза γ к точке x* , если существуют такая последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1)$, что $x_n = \gamma(t_n)$, $t_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Точка $y \in D'$ называется *точкой множества накопления $C_\gamma(f, x)$ вдоль разреза γ* (cluster set along end-cut), если существует последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к x вдоль γ , такая, что $f(x_n) \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$. Если $C_\gamma(x, f)$ состоит из одной точки, то говорят, что *существует предел f по разрезу γ* .

Предложение 4.3. Пусть $f: D \rightarrow D'$ — $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$ -гомеоморфизм, $p_0 \leq q \leq p \leq Q$. Если носители граничных элементов $H_{\rho,q}(D')$ одноточечные, то существует предел отображения f по любому разрезу, т. е. для любого разреза γ с концом в точке $x \in \partial D$ существует предел

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \gamma}} f(z) = \mathcal{S}(\bar{f}(h_x)),$$

где h_x — емкостной граничный элемент, ассоциированный с точкой x по разрезу γ .

Доказательство. Пусть γ — разрез с концевой точкой $x \in \partial D$. В силу предложения 3.14 точка x принадлежит носителю некоторого емкостного элемента, обозначим этот элемент символом h_x .

Тогда любая последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек вдоль γ фундаментальна в емкостной метрике (см. предложение 3.14), и ее образ $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ — представитель элемента $\bar{f}(h_x)$ (см. теорему 4.2). Так как носитель $\mathcal{S}(\bar{f}(h_x))$ состоит из одной точки, ввиду предложения 3.11, выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \gamma}} f(z) = \mathcal{S}(\bar{f}(h_x)).$$

Таким образом, $C_\gamma(x, f) = \{\mathcal{S}(\bar{f}(h_x))\}$. $\square$

Пример 4.4. Рассмотрим пример области, в которой носители элементов неодноточечные. Положим $R^\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| < x^\alpha, x \in (0, 1), z \in (-1, 1)\}$ — область с гребнем (ridge domain) степени α ; обозначим символом R гребень $\{(0, 0, t) \mid |t| \leq 1\}$. Пусть $2 < p \leq 3$ и $\alpha > p - 1$.

Тогда гребень R — носитель одного граничного элемента h (подробнее см., например, [23, 25, 47]). С другой стороны, для тождественного отображения $f = \text{id}$ и для любой точки $x \in R$ выполняются соотношения:

$$C_\gamma(x, f) = \{x\} \subsetneq \mathcal{S}(\bar{f}(h)) = R,$$

где γ — произвольный разрез с концевой точкой x .

Отметим, что аналоги теоремы Кёбе рассматривались для квазиконформных отображений в евклидовом пространстве в работе [15], в работе [11] доказан метрический аналог теоремы Кёбе для гомеоморфизмов класса $\mathcal{F}$ (например, в этом классе содержатся квазиконформные отображения, определенные в равномерных областях) с помощью простых концов [10].

Замечание 4.5. Аналогично сказанному можно установить теоремы о граничном поведении $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$ -гомеоморфизмов в областях с конечно связной границей. Например, имеет место следующее утверждение: пусть $f: D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм класса $\mathcal{Q}_{q,p}^{-1}$, граница ∂D локально связна в точке $x \in \partial D$ и h — такой емкостной граничный элемент, что $x \in \mathcal{S}(h)$ (такой элемент всегда существует), допустим также, что $\mathcal{S}(\bar{f}(h)) = \{y\}$; тогда гомеоморфизм f продолжается по непрерывности в точки $x' \in \mathcal{S}(h)$, причем выполнено равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x' \\ z \in D}} f(z) = y \quad \text{для любой точки } x' \in \mathcal{S}(h).$$

Доказательство этих результатов следует аргументам работы [25] и может быть модифицировано очевидным способом в случае метрических пространств с мерой.

Список литературы

1. Carathéodory C. Über die Begrenzung einfachzusammenhängender Gebiete // *Math. Ann.* 1913. V. 73. N 3. P. 323–370 (German).
2. Суворов Г. Д. Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // *Матем. сб.* 1953. Т. 33(75). № 1. С. 73–100.

3. Epstein D. B. A. Prime Ends // *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1981. V. 3. N 3. P. 385–414.
4. Зорич В. А. Соответствие границ при Q -квазиконформных отображениях шара // *Докл. АН СССР*. 1962. Т. 145. № 4. С. 1209–1212.
5. Зорич В. А. Определение граничных элементов посредством сечений // *Докл. АН СССР*. 1965. Т. 164. № 4. С. 736–739.
6. Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. The Dirichlet problem for p -harmonic functions with respect to the Mazurkiewicz boundary, and new capacities // *J. Differential Equations*. 2015. V. 259. N 7. P. 3078–3114.
7. Milnor J. *Dynamics in one complex variable*. Princeton University Press. Annals of Mathematics Studies, 160, Princeton, NJ.
8. Rempe L. On prime ends and local connectivity // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2008. V. 40. N 5. P. 817–826.
9. Суворов Г. Д. *Простые концы и последовательности плоских отображений*. Киев: Наукова Думка, 1986.
10. Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. Prime ends for domains in metric spaces // *Adv. Math.* 2013. V. 238. P. 459–505.
11. Adamowicz T. Prime ends in metric spaces and quasiconformal-type mappings // *Anal. Math. Phys.* 2019. V. 9. N 4. С. 1941–1975.
12. Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И. Простые концы и классы Орлича — Соболева // *Алгебра и анализ*. 2015. Т. 27. № 5. С. 81–116.
13. Kuusalo T. Quasiconformal mappings without boundary extensions // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A*. 1985. V. 10. P. 331–338.
14. Näkki R. Boundary Behavior of Quasiconformal Mappings in n -Space // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A*. 1970. V. 484. P. 1–50.
15. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings // *Journal d'Analyse Mathématique*. 1979. V. 35. N 1. P. 13–40.
16. Väisälä J. *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings*. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 1971.
17. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in Modern Mapping Theory*. NY: Springer-Verlag, 2008.

18. Севостьянов Е. А. О граничном продолжении и равностепенной непрерывности семейств отображений в терминах простых концов // *Алгебра и анализ*. 2018. Т. 30, № 6. С. 97–146.
19. Kline J., Lindquist J., Shanmugalingam N. Carathéodory-type extension theorem with respect to prime end boundaries // *The Journal of Geometric Analysis*. 2021. V. 31. P. 4966–5009.
20. Sevost'yanov E. On boundary extension of mappings in metric spaces in terms of prime ends // *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*. 2019. V. 44. P. 65–90.
21. Водопьянов С. К. О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // *Сиб. мат. журн.* 1975. Т. 16. № 3. С. 630–633.
22. Гольдштейн В. М., Водопьянов С. К. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при конформных отображениях // *Докл. АН СССР*. 1978. Т. 238. № 5. С. 1040–1042.
23. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // *Успехи матем. наук*. 1979. Т. 34. № 1. С. 17–65.
24. Кругликов В. И. Простые концы пространственных областей с переменными границами // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 297. № 5. С. 1047–1050.
25. Vodopyanov S. K., Molchanova A. The boundary behavior of $\mathcal{Q}_{p,q}$ -homeomorphisms // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2023. Т. 87. № 4. С. 47–90.
26. Водопьянов С. К. Операторы композиции весовых пространства Соболева и теория $\mathcal{Q}_p$ -гомеоморфизмов // *Докл. АН*. 2020. Т. 494. № 5. С. 21–25.
27. Водопьянов С. К. Об аналитических и геометрических свойствах отображений в теории $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов // *Матем. заметки*. 2020. Т. 108. № 6. С. 924–928.
28. Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов // *Сиб. матем. журн.* 2020. Т. 61. № 6. С. 1257–1299.

29. Водопьянов С. К., Томилов А. О. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2021. Т. 85. № 5. С. 58–109
30. Сбоев Д. А. Операторы композиции пространств Соболева на метрических пространствах с мерой. I // *Сиб. матем. журнал.* 2025. Т. 66. № 5. С. 951–969.
31. Водопьянов С. К., Сбоев Д. А. Замены переменной для функций классов Соболева на метрических пространствах с мерой // *Успехи матем. наук* 2025. Т. 80. № 5(485). С. 181–182.
32. Водопьянов С. К., Сбоев Д. А. Операторы композиции пространств Соболева на метрических пространствах с мерой. II // *Матем. сб.* 2026. Т. 217 (в печати); arXiv preprint. [arXiv:2507.11455](https://arxiv.org/abs/2507.11455). — 2025.
33. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*. New York: Springer-Verlag, 2001.
34. Федерер Г. *Геометрическая теория меры*. М.: «Наука», 1987.
35. Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J. T. *Sobolev spaces on metric measure spaces*. Cambridge University Press, 2015.
36. Hajlasz P. Sobolev spaces on metric-measure spaces / *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces*. 2003. V. 338. P. 173–218.
37. Ambrosio L., Ikonen T., Lučić D., Pasqualetto E. Metric Sobolev spaces I: equivalence of definitions // *Milan Journal of Mathematics*. 2024. P. 1–93.
38. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // *Сибирский математический журнал.* 1997. Т. 38. № 3. С. 657–675.
39. Keith S., Zhong X. The Poincaré inequality is an open ended condition // *Ann. Math.* 2008. V. 167. N 2. P. 575–599.
40. Korte R. Geometric implications of the Poincaré inequality // *Results Math.* 2007. V. 50. N 1–2. P. 93–107.
41. Björn J., Shanmugalingam N. Poincaré inequalities, uniform domains and extension properties for Newton–Sobolev functions in metric spaces // *Journal of mathematical analysis and applications*. 2007. V. 332. N 1. P. 190–208.

42. Kallunki S., Shanmugalingam N. Modulus and continuous capacity // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2001. V. 26. N 2. P. 455–464.
43. Adamowicz T., Shanmugalingam N. Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // *Annales Fennici Mathematici*. 2010. V. 35. N 2. P. 609–626.
44. Куратовский К. *Топология*. М.: «Мир», 1969. Т. 2.
45. Rajala T. Approximation by uniform domains in doubling quasiconvex metric spaces // *Complex Analysis and its Synergies*. 2021. V. 7. N 1. 4 p.
46. Hausdorff F. *Set theory*. American Mathematical Soc., 2021.
47. Сбоев Д. А. Емкостные граничные элементы на римановых многообразиях и обобщенные границы // *Сибирский математический журнал*. 2025. Т. 66. № 3. С. 523–553.
48. Jerison D. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition // *Duke Mathematical Journal*. 1986. V. 53. N 2. P. 503–523.
49. Folland G. B., Stein E. M. *Hardy spaces on homogeneous groups*. Princeton University Press, 2020.
50. Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Science & Business Media, 2007.
51. Cheeger J., Gromov M., Taylor M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds // *Journal of Differential Geometry*. 1982. V. 17. N 1. P. 15–53.
52. Buser P. A note on the isoperimetric constant // *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*. 1982. V. 15. N 2. P. 213–230.
53. Hajłasz P., Koskela P. *Sobolev met Poincaré*. American Mathematical Soc., 2000.
54. Heinonen J., Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // *Acta Mathematica*. 1998. V. 181. N 1. P. 1–61.

55. Koebe P. Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung // *J. Reine Angew. Math.* 1915. V. 145 P. 177–223 (German).

References

1. Carathéodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete // *Math. Ann.* 1913. V. 73. N 3. P. 323–370 (German).
2. Suvorov G. D. Die Primenden einer Folge ebener Gebiete, die gegen einen Kern konvergiert // *Mat. Sb.* 1953. Nov. Ser. 33(75), P. 73–100 (Russian).
3. Epstein D. B. A. Prime Ends // *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1981. V. 3. N 3. P. 385–414.
4. Zorich V. A. Correspondence of the boundaries in Q -quasiconformal mapping of a sphere // *Sov. Math., Dokl.* 1962. V. 3. P. 1183–1186.
5. Zorich V. A. Determination of boundary elements by means of sections // *Sov. Math., Dokl.* 1965. V. 6. P. 1284–1287.
6. Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. The Dirichlet problem for p -harmonic functions with respect to the Mazurkiewicz boundary, and new capacities // *J. Differential Equations.* 2015. V. 259. N 7. P. 3078–3114.
7. Milnor J. *Dynamics in one complex variable*. Princeton University Press. Annals of Mathematics Studies, 160, Princeton, NJ.
8. Rempe L. On prime ends and local connectivity // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2008. V. 40. N 5. P. 817–826.
9. Suvorov G. D. *Prime ends and sequences of plane mappings* Kiev: Naukova Dumka, 1986 (Russian).
10. Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N. Prime ends for domains in metric spaces // *Adv. Math.* 2013. V. 238. P. 459–505.
11. Adamowicz T. Prime ends in metric spaces and quasiconformal-type mappings // *Anal. Math. Phys.* 2019. V. 9. N 4. C. 1941–1975.
12. Kovtonyuk D. A., Ryazanov V. I. Prime ends and the Orlicz–Sobolev classes // *St. Petersburg Math. J.* 2015. V. 27 N. 5. P. 81–116.

13. Kuusalo T. Quasiconformal mappings without boundary extensions // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.* 1985. V. 10. P. 331–338.
14. Näkki R. Boundary Behavior of Quasiconformal Mappings in n -Space // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.* 1970. V. 484. P. 1–50.
15. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings // *Journal d'Analyse Mathématique.* 1979. V. 35. N 1. P. 13–40.
16. Väisälä J. *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings.* Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 1971.
17. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in Modern Mapping Theory.* NY: Springer-Verlag, 2008.
18. Sevost'yanov E. A. On boundary extension and equicontinuity of families of mappings in terms of prime ends // *St. Petersburg Math. J.* 2019. V. 30. N 6. P. 973–1005.
19. Kline J., Lindquist J., Shanmugalingam N. Carathéodory-type extension theorem with respect to prime end boundaries // *The Journal of Geometric Analysis.* 2021. V. 31. P. 4966–5009.
20. Sevost'yanov E. On boundary extension of mappings in metric spaces in terms of prime ends // *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica.* 2019. V. 44. P. 65–90.
21. Vodopyanov S. K. The boundary correspondence for quasiconformal mappings of n -dimensional domains // *Siberian Math. J.* 1975. V. 16. N 3. P. 487–490.
22. Gol'dstein V. M., Vodop'yanov S. K. Metric completion of a domain by using a conformal capacity invariant under quasi-conformal mappings // *Sov. Math., Dokl.* 1978. V. 19. P. 158–161.
23. Vodop'yanov S. K., Gol'dstein V. M., Reshetnyak Yu. G. On geometric properties of functions with generalized first derivatives // *Russ. Math. Surv.* 1979. V. 34. N 1. P. 19–74.
24. Kruglikov V. I. Prime ends of spatial domains with variable boundaries // *Sov. Math., Dokl.* 1988. V. 36. N 3. P. 565–568.
25. Vodopyanov S. K., Molchanova A. The boundary behavior of $\mathcal{Q}_{p,q}$ -homeomorphisms // *Izv. Math.* 2023. V. 87. N 4. P. 683–725.

26. Vodopyanov S. K. Composition operators on weighted Sobolev spaces and the theory of $\mathcal{Q}_p$ -homeomorphisms // *Dokl. Math.* 2020. V. 102. N 2. P. 371–375.
27. Vodopyanov S. K. On the Analytic and Geometric Properties of Mappings in the Theory of $\mathcal{Q}_{q,p}$ -Homeomorphisms // *Math. Notes*. 2020. V. 108. N 6. P. 889–894.
28. Vodopyanov S. K. The regularity of inverses to Sobolev mappings and the theory of $\mathcal{Q}_{q,p}$ -homeomorphisms // *Siberian Math. J.* 2020. V. 61. N 6. P. 1002–1038.
29. Vodopyanov S. K., Tomilov A. O. Functional and analytic properties of a class of mappings in quasi-conformal analysis // *Izv. Math.* 2021. V. 85. N 5. P. 883–931.
30. Sboev D. A. Composition Operators Between Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces. I. // *Sib. Math. J.* 2025. V. 66. N 5. P. 1254–1269.
31. Vodopyanov S. K., Sboev D. A. Change of variables for Sobolev class functions on metric measure spaces // *Russ. Math. Surv.* 2025. V. 80. N 5 (to appear).
32. Vodopyanov S. K., Sboev D. A. Composition operators on Sobolev spaces with a metric measure space as a domain. II // *Mat. Sb.* 2026. V. 217 (to appear). arXiv preprint. [arXiv:2507.11455](https://arxiv.org/abs/2507.11455). — 2025.
33. Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*. New York: Springer-Verlag, 2001.
34. Federer H. *Geometric measure theory*. Springer, Cham, 1987.
35. Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J. T. *Sobolev spaces on metric measure spaces*. Cambridge University Press, 2015.
36. Hajłasz P. Sobolev spaces on metric-measure spaces / *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces*. 2003. V. 338. P. 173–218.
37. Ambrosio L., Ikonen T., Lučić D., Pasqualetto E. Metric Sobolev spaces I: equivalence of definitions // *Milan Journal of Mathematics*. 2024. P. 1–93.
38. Reshetnyak Yu. G. Sobolev classes of functions with values in a metric space // *Siberian Math. J.* 1997. V. 38. N 3. P. 567–583.
39. Keith S., Zhong X. The Poincaré inequality is an open ended condition // *Ann. Math.* 2008. V. 167. N 2. P. 575–599.

40. Korte R. Geometric implications of the Poincaré inequality // *Results Math.* 2007. V. 50. N 1–2. P. 93–107.
41. Björn J., Shanmugalingam N. Poincaré inequalities, uniform domains and extension properties for Newton–Sobolev functions in metric spaces // *Journal of mathematical analysis and applications.* 2007. V. 332. N 1. P. 190–208.
42. Kallunki S., Shanmugalingam N. Modulus and continuous capacity // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2001. V. 26. N 2. P. 455–464.
43. Adamowicz T., Shanmugalingam N. Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // *Annales Fennici Mathematici.* 2010. V. 35. N 2. P. 609–626.
44. Kuratowski K. *Topology.* Academic press 1968. Vol. II.
45. Rajala T. Approximation by uniform domains in doubling quasiconvex metric spaces // *Complex Analysis and its Synergies.* 2021. V. 7. N 1. 4 p.
46. Hausdorff F. *Set theory.* American Mathematical Soc., 2021.
47. Sboev D. A. Capacity boundary elements in Riemannian manifolds and generalized boundaries // *Siberian Mathematical Journal.* 2025. V. 66. N 3. P. 763–787.
48. Jerison D. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition // *Duke Mathematical Journal.* 1986. V. 53. N 2. P. 503–523.
49. Folland G. B., Stein E. M. *Hardy spaces on homogeneous groups.* Princeton University Press, 2020.
50. Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians.* Springer Science & Business Media, 2007.
51. Cheeger J., Gromov M., Taylor M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds // *Journal of Differential Geometry.* 1982. V. 17. N 1. P. 15–53.
52. Buser P. A note on the isoperimetric constant // *Annales scientifiques de l’École normale supérieure.* 1982. V. 15. N 2. P. 213–230.
53. Hajlasz P., Koskela P. *Sobolev met Poincaré.* American Mathematical Soc., 2000.

54. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // *Acta Mathematica*. 1998. V. 181. N 1. P. 1–61.
55. *Koebe P.* Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung // *J. Reine Angew. Math.* 1915. V. 145 P. 177–223 (German).

Информация об авторах

Сергей Константинович Водопьянов, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN 6848-2109 AuthorID: 2073

Scopus Author ID 8356929100

Данил Алексеевич Сбоев, ассистент

SPIN 5812-7846 AuthorID: 1281424

Scopus Author ID 58749493100

Author Information

Sergey K. Vodopyanov, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN 6848-2109 AuthorID: 2073

Scopus Author ID 8356929100

Danil A. Sboev, assistant

SPIN 5812-7846 AuthorID: 1281424

Scopus Author ID 58749493100

*Статья поступила в редакцию 10.07.2025;
одобрена после рецензирования 13.10.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 10.07.2025;
approved after reviewing 13.10.2025; accepted for publication 05.11.2025*